152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I) Préliminaires

1) Valeurs propres

Définition 1.1 : • $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u si $\mathrm{Ker}(u - \lambda id) \neq \{0\}$ i.e. s'il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$.

• Un tel x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

• On note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda id)$ le sous-espace propre associé à λ.

Définition 1.2 : On définit le polynôme caractéristique de u par $\chi_u(X) = \det(u - X id) \in \mathbb{K}[X]$.

Proposition 1.3 : S'équivalent :

- $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u
- $u - \lambda id$ est non inversible
- $\chi_u(\lambda) = 0$

Proposition 1.4 : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u, de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}$ en tant que racine de χ_u. Alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq \alpha$.

Théorème 1.5 : Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres 2-à-2 distinctes de u. Alors les $(E_{\lambda_k})_{1 \leq k \leq p}$ sont en somme directe.

2) Polynômes annulateurs

Définition 1.6 : • $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$ i.e. pour tout $x \in E$, $P(u)(x) = 0$.

• On appelle polynôme minimal de u le générateur unitaire de l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] \,;\, P(u) = 0\}$, noté Π_u.

Remarque 1.7 : Il existe bien un polynôme annulateur de u non nul car E est de dimension finie. De plus, $\mathbb{K}[X]$ étant principal, Π_u est bien défini.

Proposition 1.8 : Soit P un polynôme annulateur de u et λ une valeur propre de u. Alors $P(\lambda) = 0$.

Exemple 1.9 : 0 est la seule valeur propre d'un endomorphisme nilpotent.

Théorème 1.10 (Cayley-Hamilton)
On a $\chi_u(u) = 0$. Autrement dit, $\Pi_u \mid \chi_u$.

Lemme 1.11 (Lemme des noyaux)
Soit $P_1, \dots, P_p$, où $p \geq 2$, une famille de polynômes 2-à-2 premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$ et $P = \prod_{k=1}^{p} P_k$.

Alors $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(P_k(u))$.

Corollaire 1.12 : Soit $\Pi_u = \prod_{k=1}^{p} P_k^{\beta_k}$ la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme minimal de u.

Alors $E = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(P_k^{\beta_k}(u))$.

II) Diagonalisation

1) Définition et premières propriétés

Définition 2.1 : On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Proposition 2.2 : Si u admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors u est diagonalisable.

Proposition 2.3 : Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres de u 2-à-2 distinctes. S'équivalent :

- u est diagonalisable
- $E = \bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(u - \lambda_k \, id)$
- $n = \sum_{k=1}^{p} \dim\left(\operatorname{Ker}(u - \lambda_k \, id)\right)$
- χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et chaque λ_k est de multiplicité $\alpha_k = \dim\left(\operatorname{Ker}(u - \lambda_k \, id)\right)$ pour $1 \leq k \leq p$.

2) Critères de diagonalisabilité

Théorème 2.4 : S'équivalent :

- u est diagonalisable
- il existe un polynôme annulateur de u, scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$.
- Π_u est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$.

Exemple 2.5 :
- Soit p un projecteur de E i.e. $p^2 = p$. Alors p est annulé par $X^2 - X = X(X-1)$ scindé à racines simples. Ainsi, p est diagonalisable.
- Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2 et s est une symétrie i.e. $s^2 = id$, alors s est diagonalisable car annulé par $X^2 - 1$ scindé à racines simples.

Corollaire 2.6 : Si u est diagonalisable et $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $u|_F \in \mathcal{L}(F)$ est diagonalisable.

Corollaire 2.7 : Soit $q \geq 2$ un nombre premier et E un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel. Alors $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si $u^q = u$.

Théorème 2.8 : Soit $D(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \, ; \, u^q = u\}$. Alors

DEV 1

$$|D(E)| = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_q) \in \mathbb{N}^q \\ n_1 + \dots + n_q = n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \cdots |GL_{n_q}(\mathbb{F}_q)|}$$

Définition 2.9 : Soit I un ensemble comportant au moins deux éléments et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E. On dit que les $(u_i)_{i \in I}$ sont codiagonalisables s'il existe une base de vecteurs propres commune à chaque u_i, $i \in I$.

Théorème 2.10 : La famille $(u_i)_{i \in I}$ est codiagonalisable si et seulement si les endomorphismes commutent 2-à-2.

Définition 2.11 : Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Théorème 2.12 (Théorème spectral)
Tout endomorphisme symétrique se diagonalise dans une base orthonormée.

III) Applications

1) Algèbre

Proposition 3.1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A est diagonalisable et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ est tel que $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = P \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) P^{-1}$.

Définition 3.2 : Si $\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$, on appelle sous-espaces caractéristiques de u, les sous-espaces vectoriels $E_{(\lambda_k)} = \operatorname{Ker}((u - \lambda_k id)^{\alpha_k})$, pour $1 \leq k \leq p$.

Théorème 3.3 (Décomposition de Dunford)
Supposons que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tel que d soit diagonalisable, n soit nilpotent, d et n commutent, et $u = d + n$.
De plus, d et n sont des polynômes en u.

Remarque 3.4 : Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, où χ_u n'est pas forcément scindé, on peut montrer l'existence de d semi-simple tel que d et n commutent, et $u = d + n$.

Proposition 3.5 : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors u est diagonalisable si et seulement e^u l'est.

Remarque 3.6 : Si u est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, alors e^u est un polynôme en u. Plus précisément, $e^u = Q(u)$ où Q est un polynôme interpolateur de Lagrange vérifiant $Q(\lambda_k) = e^{\lambda_k}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de u.

Théorème 3.7 : Supposons que $\chi_u(X) = (-1)^n \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ et posons $P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$. Soit $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

DEV2

$$\begin{cases} w_0 = u \\ \forall k \in \mathbb{N},\ w_{k+1} = w_k - P(w_k)\left(P'(w_k)\right)^{-1} \end{cases}$$

où P' est le polynôme dérivé de P. Alors $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire sur d à partir d'un certain rang, où d apparaît dans la décomposition de Dunford de u.

2) Analyse

Théorème 3.8 : Soit $D_n'(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres distinctes et $D_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$. Alors $D_n'(\mathbb{C})$ et $D_n(\mathbb{C})$ sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$.

Corollaire 3.9 : Pour $n \geq 2$, l'application $\Pi : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}[X] \\ A \longmapsto \Pi_A \end{array}$ n'est pas continue.

Remarque 3.10 : L'application $A \mapsto \chi_A$ est continue car polynomiale en les coefficients de la matrice.

Corollaire 3.11 : Le théorème de Cayley-Hamilton sur $\mathbb{C}$ se déduit de la densité de $D_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$.

Proposition 3.12 : $D_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.